ΛΥΣΕΙΣ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

Α .

α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 62

β) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 67

γ) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο (τεχνολογικής) σελίδα 68

B_1 . $T_1 \rightarrow 3$, $T_2 \rightarrow 2$

B_2 . $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Άρα $A = A_1A_2 - A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

α) Επειδή $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, ο Τ είναι κανονικός

β) Για τον Τ είναι $\begin{cases} x' = 0 \cdot x + (-2) \cdot y \\ y' = -2x + 0 \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x' \\ x = -\dfrac{1}{2}y' \end{cases}$ **(1)**

Οπότε, αν $M(x , y)$ τυχαίο σημείο της (ε) $2x - y + 5 = 0$, τότε λόγω των (1)

έχουμε $2\left(-\dfrac{1}{2}y'\right) - \left(-\dfrac{1}{2}x'\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 10 = 0$

Άρα η εξίσωση της (ε), ως προς τον μετασχηματισμό Τ, είναι $x - 2y + 10 = 0$

ΘΕΜΑ 2^o

Α.

α) $z = \dfrac{5+i}{2+3i} = \dfrac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \dfrac{10-15i+2i+3}{4+9} = \dfrac{13-13i}{4+9} = 1-i$

β) $\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, οπότε $\left(\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \eta\mu\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$

επομένως $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Άρα $z = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

γ) Β

δ) -4

Β.

$$\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \iff |z-1| = |z-i| \iff |z-(1+0i)| = |z-(0+i)| \quad \mathbf{(1)}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των αριθμών z είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία Α(1, 0) και Β(0, 1).

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου βρίσκεται αν στην (1) θέσουμε $z = x + yi$.

$$(1) \iff |x+yi-(1+0i)| = |x+yi-(0+i)| \iff$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \iff$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2-2y+1 \iff y = x$$

ΘΕΜΑ 3^o

Α.

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-}(x^2-8x+16) = 1$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+}\left[(\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x}\right] = \alpha^2+\beta^2+2(\alpha+1)$$

Β.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = f(5) \iff$

$$1 = \alpha^2+\beta^2+2(\alpha+1) = \alpha^2+\beta^2+2(\alpha+1)$$

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha+1 = 0$$

$$(\alpha+1)^2+\beta^2 = 0$$

$$\alpha + 1 = 0 \text{ και } \beta = 0$$

$$\alpha = -1 \text{ και } \beta = 0$$

Γ.

Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$, όταν $x \geq 5$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \ln(x-5+e)$

Οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\ln(x-5+e)] = +\infty$

ΘΕΜΑ 4^{o}

Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι $\dfrac{8}{t+1} - 2$, δηλαδή $f'(t) = \dfrac{8}{t+1} - 2$, $t \geq 0$

α)

$$f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 \Leftrightarrow f'(t) = (8\ln|t+1| - 2t)' \Leftrightarrow$$

$$f(t) = 8\ln|t+1| - 2t + c$$

Για $t = 0$ έχουμε $f(0) = c$ και από την εκφώνηση είναι $f(0) = 0$, οπότε $c = 0$.

Επομένως , αφού επιπλέον είναι και $t \geq 0$, $f(t) = 8\ln(t+1) - 2t$

β)

$$f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 = \frac{-2t+6}{t+1} .$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Πρόσημο της f΄ και μονοτονία της f

t	0		3		$+\infty$
f΄		+	0	−	
f		↗	|	↘	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο,

για $t = 3$ το $f(3) = 8\ln 4 - 6$

γ)

Για $t = 8$ έχουμε $f(8) = 8\ln 9 - 16 = 16\ln 3 - 16 = 16(\ln 3 - 1) = 16(\ln 3 - \ln e)$

Αλλά $3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e \Leftrightarrow \ln 3 - \ln e > 0$

Άρα $f(8) > 0$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει φάρμακο στον οργανισμό και επομένως επιδρά σε αυτόν.

Για $t = 10$ έχουμε $f(10) = 8\ln 11 - 20 \approx 8 \cdot 2{,}4 - 20 = -0{,}8 < 0$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει φάρμακο στον οργανισμό.

Η f είναι συνεχής στο $[8\,,\,10]$ και το σύνολο τιμών αυτής είναι το

$[-0{,}8\;,\;16(\ln 3-\ln e)]$ στο οποίο περιέχεται το 0.

Άρα θα υπάρχει $t_o \in (8,\;10)$ ώστε $f(t_o) = 0$

Δηλαδή πριν την χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδραση του φαρμάκου έχει μηδενιστεί .